Grafos IV

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación

- Se pueden modelar muchos problemas con caminos formados viajando a lo largo de las aristas de los grafos.

Motivación

- Por ejemplo, el problema de determinar si un mensaje se puede enviar entre dos computadoras usando enlaces intermedios se puede estudiar con un modelo de grafos.

Motivación

- Los problemas de planificación eficiente de rutas para la entrega de correo, recolección de basura, diagnósticos en redes de computadoras, etc. pueden resolverse utilizando modelos que involucran caminos en grafos.

- De manera informal, un camino es una secuencia de aristas que comienza en un vértice de un grafo y viaja de vértice a vértice a lo largo de las aristas del grafo.

Caminos I

- A medida que el camino viaja a lo largo de sus aristas, visita los vértices a lo largo de este camino, es decir, los puntos finales de estas aristas.

Caminos I

- En la Definición 1 se da una definición formal de caminos y terminología relacionada.

Definición 1

Sea n un número entero no negativo y G un grafo no dirigido. Un *camino de longitud* n desde u hasta v en G es una secuencia de n aristas $e_1, \ldots, e_n$ de G para la cual existe una secuencia $x_0 = u, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$ de vértices tales que e_i tiene, para $i = 1, \ldots, n$, los extremos x_{i-1} y x_i. Cuando el grafo es simple, denotamos este camino por su secuencia de vértices $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (porque enumerar estos vértices determina de forma única el camino). El camino es un *circuito* si comienza y termina en el mismo vértice, es decir, si $u = v$, y tiene una longitud mayor que cero. Se dice que el camino o circuito *pasa por* los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ o *atraviesa* las aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Un camino o circuito es *simple* si no contiene la misma arista más de una vez.

Definición 2

Sea n un número entero no negativo y G un grafo dirigido. Un *camino de longitud* n desde u hasta v en G es una secuencia de aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de G tal que e_1 está asociado con (x_0, x_1), e_2 está asociado con (x_1, x_2), y así sucesivamente, con e_n asociado con (x_{n-1}, x_n), donde $x_0 = u$ y $x_n = v$. Cuando no hay múltiples aristas en el grafo dirigido, este camino se denota por su secuencia de vértices $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Un camino de longitud mayor que cero que comienza y termina en el mismo vértice se llama *circuito* o *ciclo*. Un camino o circuito se llama *simple* si no contiene la misma arista más de una vez.

Conectividad en grafos I

- ¿Cuándo tiene una red de computadoras la propiedad de que cada par de computadoras puede compartir información, si los mensajes pueden enviarse a través de una o más computadoras intermedias?

Conectividad en grafos I

- Cuando se usa un grafo para representar esta red de computadoras, donde los vértices representan las computadoras y las aristas representan los enlaces de comunicación, esta pregunta se convierte en:

Conectividad en grafos I

- ¿Cuándo existe siempre un camino entre dos vértices en el grafo?

Definición 3

Un grafo no dirigido se llama *conectado* si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo. Un grafo no dirigido que no está conectado se llama *desconectado*. Decimos que *desconectamos* un grafo cuando eliminamos vértices o aristas, o ambas, para producir un subgrafo desconectado.

Definición 3

Un grafo no dirigido se llama *conectado* si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo. Un grafo no dirigido que no está conectado se llama *desconectado*. Decimos que *desconectamos* un grafo cuando eliminamos vértices o aristas, o ambas, para producir un subgrafo desconectado.

- Por lo tanto, dos computadoras cualesquiera en la red pueden comunicarse si y sólo si el grafo de esta red está conectado.

Ejemplo 0

- El grafo G_1 en la Figura 1 está conectado, porque para cada par de vértices distintos hay un camino entre ellos.

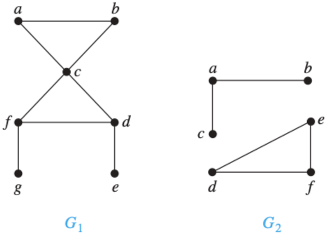


Figura 1: Los grafos G_1 y G_2 para el Ejemplo 1.

Ejemplo 0

- El grafo G_1 en la Figura 1 está conectado, porque para cada par de vértices distintos hay un camino entre ellos.

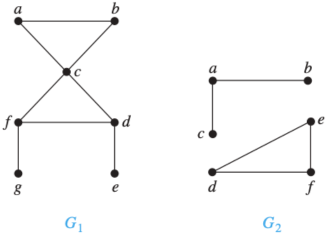


Figura 1: Los grafos G_1 y G_2 para el Ejemplo 1.

- Sin embargo, el grafo G_2 en la Figura 1 no está conectado.

Ejemplo 0

- El grafo G_1 en la Figura 1 está conectado, porque para cada par de vértices distintos hay un camino entre ellos.

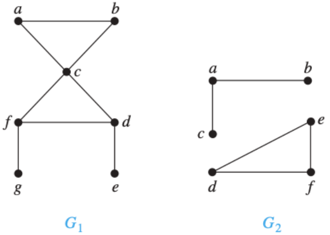


Figura 1: Los grafos G_1 y G_2 para el Ejemplo 1.

- Sin embargo, el grafo G_2 en la Figura 1 no está conectado.
- Por ejemplo, no hay un camino en G_2 entre los vértices a y d.

Teorema 1 I

Teorema 1

Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conectado.

Teorema 1 I

Teorema 1

Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conectado.

Demostración:

- Sean u y v dos vértices distintos del grafo no dirigido conectado $G = (V, E)$.

Teorema 1

Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conectado.

Demostración:

- Sean u y v dos vértices distintos del grafo no dirigido conectado $G = (V, E)$.
- Como G está conectado, hay al menos un camino entre u y v. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de menor longitud.

Teorema 1

Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conectado.

Demostración:

- Sean u y v dos vértices distintos del grafo no dirigido conectado $G = (V, E)$.
- Como G está conectado, hay al menos un camino entre u y v. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de menor longitud.
- Este camino de menor longitud es simple.

Teorema 1

Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conectado.

Demostración:

- Sean u y v dos vértices distintos del grafo no dirigido conectado $G = (V, E)$.
- Como G está conectado, hay al menos un camino entre u y v. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de menor longitud.
- Este camino de menor longitud es simple.
- Para ver esto, suponga que no es simple, entonces $x_i = x_j$ para algunos i y j con $0 \leq i < j$.

Teorema 1

Existe un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conectado.

Demostración:

- Sean u y v dos vértices distintos del grafo no dirigido conectado $G = (V, E)$.
- Como G está conectado, hay al menos un camino entre u y v. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de menor longitud.
- Este camino de menor longitud es simple.
- Para ver esto, suponga que no es simple, entonces $x_i = x_j$ para algunos i y j con $0 \leq i < j$.
- Esto significa que hay un camino de u a v de menor longitud con secuencia de vértices $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$ obtenido al eliminar las aristas correspondientes a la secuencia de vértices $x_i, \ldots, x_{j-1}$.

Conectividad en grafos III

Definición 4

Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si hay un camino de a a b y de b a a siempre que a y b sean vértices en el grafo.

Conectividad en grafos III

Definición 4

Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si hay un camino de a a b y de b a a siempre que a y b sean vértices en el grafo.

- Para que un grafo dirigido esté fuertemente conectado, debe haber una secuencia de aristas dirigidas desde cualquier vértice en el grafo a cualquier otro vértice.

Definición 4

Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si hay un camino de a a b y de b a a siempre que a y b sean vértices en el grafo.

- Un grafo dirigido puede fallar al estar fuertemente conectado pero aún estar en "una pieza".

Definición 4

Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si hay un camino de a a b y de b a a siempre que a y b sean vértices en el grafo.

- La definición 5 hace que esta noción sea precisa.

Definición 5

Un grafo dirigido está *débilmente conectado* si hay un camino entre cada dos vértices en el grafo no dirigido subyacente.

Definición 5

Un grafo dirigido está *débilmente conectado* si hay un camino entre cada dos vértices en el grafo no dirigido subyacente.

- Es decir, un grafo dirigido está débilmente conectado si y sólo si siempre hay un camino entre dos vértices cuando se ignoran las direcciones de las aristas.

Definición 5

Un grafo dirigido está *débilmente conectado* si hay un camino entre cada dos vértices en el grafo no dirigido subyacente.

- Claramente, cualquier grafo dirigido fuertemente conectado también está débilmente conectado.

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

¿Los grafos dirigidos G y H que se muestran en la Figura 2 están fuertemente conectados? ¿Están débilmente conectados?

Ejemplo 1 II

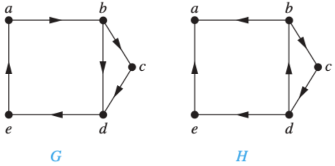


Figura 2: Los grafos G y H para el Ejemplo 1.

Solución:

- G está fuertemente conectado porque hay un camino entre dos vértices cualesquiera en este grafo dirigido.

Ejemplo 1 II

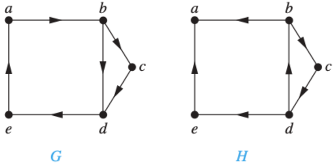


Figura 2: Los grafos G y H para el Ejemplo 1.

Solución:

- Por tanto, G también está débilmente conectado.

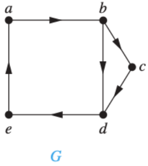


Figura 2: Los grafos G y H para el Ejemplo 1.

Solución:

- El grafo H no está fuertemente conectado.

Ejemplo 1 II

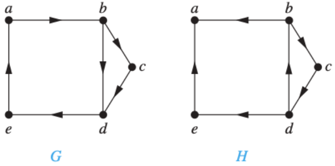


Figura 2: Los grafos G y H para el Ejemplo 1.

Solución:

- No hay un camino dirigido desde a hasta b en este grafo.

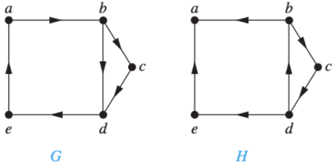


Figura 2: Los grafos G y H para el Ejemplo 1.

Solución:

- Sin embargo, H está débilmente conectado, porque hay un camino entre dos vértices cualesquiera en el grafo no dirigido subyacente de H.

Motivación I

- ¿Podemos viajar a lo largo de las aristas de un grafo comenzando en un vértice y regresando a él atravesando cada arista del grafo exactamente una vez?

Motivación I

- De manera similar, ¿podemos viajar a lo largo de las aristas de un grafo comenzando en un vértice y regresando a él mientras visitamos cada vértice del grafo exactamente una vez?

Motivación I

- Aunque estas preguntas parecen ser similares, la primera pregunta, que pregunta si un grafo tiene un circuito de Euler, se puede responder fácilmente simplemente examinando los grados de los vértices del grafo, mientras que la segunda pregunta, que pregunta si un grafo tiene un circuito de Hamilton es bastante difícil de resolver para la mayoría de los grafos.

Motivación I

- En esta sección estudiaremos estas preguntas y discutiremos la dificultad de resolverlas.

Motivación I

- Aunque ambas preguntas tienen muchas aplicaciones prácticas en muchas áreas diferentes, ambas surgieron en viejos acertijos.

Motivación I

- Aprenderemos sobre estos viejos rompecabezas, así como sobre aplicaciones prácticas modernas.

Caminos y circuitos de Euler I

- La ciudad de Königsberg, Prusia (ahora llamada Kaliningrado y parte de la república rusa), estaba dividida en cuatro secciones por los brazos del río Pregel.

[1] Sólo cinco puentes conectan Kaliningrado en la actualidad. De estos, sólo quedan dos de la época de Euler.

- Estas cuatro secciones incluían las dos regiones a orillas del Pregel, la isla Kneiphof y la región entre las dos ramas del Pregel.

[1] Sólo cinco puentes conectan Kaliningrado en la actualidad. De estos, sólo quedan dos de la época de Euler.

- En el siglo XVIII, siete puentes conectaban estas regiones[1].

[1] Sólo cinco puentes conectan Kaliningrado en la actualidad. De estos, sólo quedan dos de la época de Euler.

- La figura 3 muestra estas regiones y puentes.

[1] Sólo cinco puentes conectan Kaliningrado en la actualidad. De estos, sólo quedan dos de la época de Euler.

- La gente del pueblo daba largos paseos por la ciudad los domingos.

[1] Sólo cinco puentes conectan Kaliningrado en la actualidad. De estos, sólo quedan dos de la época de Euler.

- Se preguntaron si era posible comenzar en algún lugar de la ciudad, cruzar todos los puentes una vez sin cruzar ningún puente dos veces y regresar al punto de partida.

[1] Sólo cinco puentes conectan Kaliningrado en la actualidad. De estos, sólo quedan dos de la época de Euler.

Caminos y circuitos de Euler II

- El matemático suizo Leonhard Euler resolvió este problema.

Caminos y circuitos de Euler II

- Su solución, publicada en 1736, puede ser el primer uso de la teoría de grafos.

- Euler estudió este problema usando el multigrafo obtenido cuando las cuatro regiones están representadas por vértices y los puentes por aristas.

- Este multigrafo se muestra en la Figura 4.

Caminos y circuitos de Euler II

- El problema de cruzar todos los puentes sin cruzar ningún puente más de una vez puede reformularse en términos de este modelo.

- La pregunta es: ¿Existe un circuito simple en este multigrafo que contenga todas las aristas?

Caminos y circuitos de Euler III

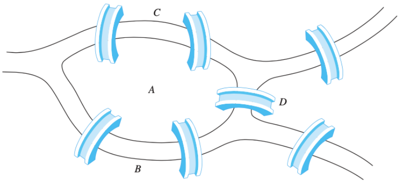


Figura 3: Los siete puentes de Königsberg.

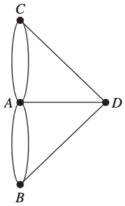


Figura 4: Multigrafo que modela la ciudad de Königsberg.

Definición 6

Un *circuito de Euler* en un grafo G es un circuito simple que contiene todas las aristas de G. Un *camino de Euler* en G es un camino simple que contiene todos las aristas de G.

Ejemplo 2

¿Cuál de los grafos no dirigidas de la Figura 5 tiene un circuito de Euler? De los que no lo tienen, ¿cuáles tienen un camino de Euler?

Ejemplo 2 II

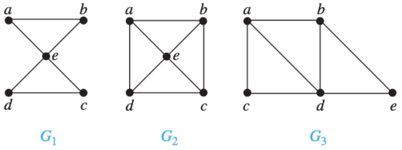


Figura 5: Los grafos no dirigidos para el Ejemplo 2.

Solución:

- El grafo G_1 tiene un circuito de Euler, por ejemplo, a, e, c, d, e, b, a.

Ejemplo 2 II

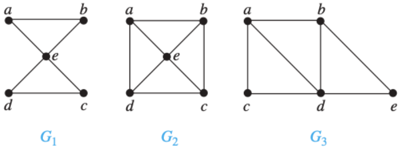


Figura 5: Los grafos no dirigidos para el Ejemplo 2.

Solución:

- Ninguno de los grafos G_2 o G_3 tiene un circuito de Euler.

Ejemplo 2 II

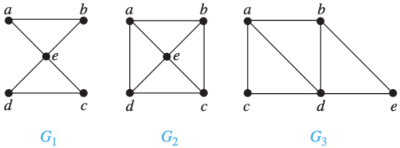


Figura 5: Los grafos no dirigidos para el Ejemplo 2.

Solución:

- Sin embargo, G_3 tiene un camino de Euler, a saber, a, c, d, e, b, d, a, b. G_2 no tiene un camino de Euler.

Ejemplo 3

¿Cuál de los grafos dirigidos de la Figura 6 tiene un circuito de Euler? De los que no lo tienen, ¿cuáles tienen un camino de Euler?

Ejemplo 3 II

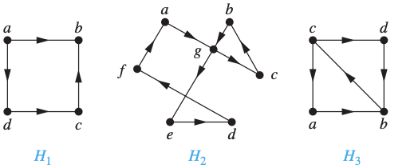


Figura 6: Los grafos dirigidos para el Ejemplo 3.

Solución:

- El grafo H_2 tiene un circuito de Euler, por ejemplo, a, g, c, b, g, e, d, f, a.

Ejemplo 3 II

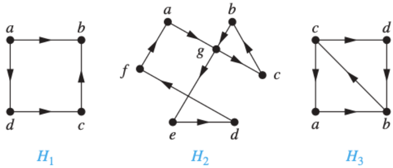


Figura 6: Los grafos dirigidos para el Ejemplo 3.

Solución:

- Ni H_1 ni H_3 tienen un circuito de Euler.

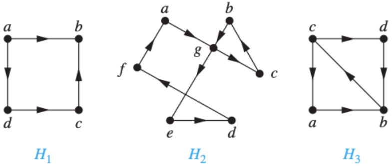


Figura 6: Los grafos dirigidos para el Ejemplo 3.

Solución:

- H_3 tiene un camino de Euler, a saber, c, a, b, c, d, b, pero H_1 no lo tiene.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- Existen criterios simples para determinar si un multigrafo tiene un circuito de Euler o un camino de Euler.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- Euler los descubrió cuando resolvió el famoso problema del puente de Königsberg.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- Supondremos que todos los grafos discutidas en esta sección tienen un número finito de vértices y aristas.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- ¿Qué podemos decir si un multigrafo conectado tiene un circuito de Euler?

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- Lo que podemos mostrar es que cada vértice debe tener un grado par.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- Para hacer esto, primero observe que un circuito de Euler comienza con un vértice a y continúa con una arista incidente con a, digamos $\{a, b\}$.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler I

- La arista $\{a, b\}$ contribuye con uno al $deg(a)$.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler II

- Cada vez que el circuito pasa por un vértice, contribuye con dos al grado del vértice, porque el circuito entra por una arista que incide en este vértice y sale por otra arista.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler II

- Finalmente, el circuito termina donde comenzó, contribuyendo con uno al $deg(a)$.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler II

- Por lo tanto, el $deg(a)$ debe ser par, porque el circuito aporta uno cuando comienza, uno cuando termina y dos cada vez que pasa por a (si es que alguna vez lo hace).

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler II

- Un vértice distinto de a tiene un grado par porque el circuito contribuye con dos a su grado cada vez que pasa por el vértice.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler II

- Concluimos que si un grafo conectado tiene un circuito de Euler, entonces cada vértice debe tener un grado par.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- ¿Es también suficiente esta condición necesaria para la existencia de un circuito de Euler?

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- Es decir, ¿debe existir un circuito de Euler en un multigrafo conectado si todos los vértices tienen un grado par?

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- Esta cuestión puede resolverse afirmativamente con una construcción.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- Suponga que G es un grafo múltiple conectado con al menos dos vértices y que el grado de cada vértice de G es par.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- Formaremos un circuito simple que comienza en un vértice arbitrario a de G, construyéndolo arista por arista.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- Sea $x_0 = a$, primero, elegimos arbitrariamente una arista $\{x_0, x_1\}$ incidente con a lo cual es posible porque G está conectado.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler III

- Continuamos construyendo un camino simple $\{x_0, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, ..., $\{x_{n-1}, x_n\}$, agregando sucesivamente las aristas una por una al camino hasta que no podamos agregar otra arista al camino.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler IV

- Esto sucede cuando llegamos a un vértice para el que ya hemos incluido todas las aristas incidentes con ese vértice en el camino.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler IV

- Por ejemplo, en el grafo G de la Figura 7 comenzamos en a y elegimos sucesivamente las aristas $\{a, f\}$, $\{f, c\}$, $\{c, b\}$ y $\{b, a\}$.

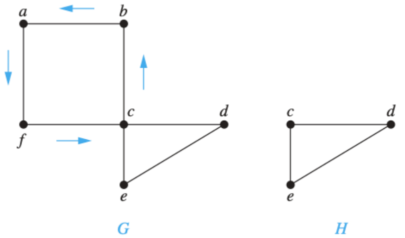


Figura 7: Construcción de un circuito de Euler en G.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler V

- El camino que hemos construido debe terminar porque el grafo tiene un número finito de aristas, por lo que tenemos la garantía de llegar eventualmente a un vértice para el que no hay aristas disponibles para agregar al camino.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler V

- El camino comienza en a con una arista de la forma $\{a, x\}$, y ahora mostramos que debe terminar en a con una arista de la forma $\{y, a\}$.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler V

- Para ver que el camino debe terminar en a, tenga en cuenta que cada vez que el camino atraviesa un vértice con un grado par, usa sólo una arista para ingresar a este vértice, por lo que debido a que el grado debe ser al menos dos, al menos queda una arista para el camino para dejar el vértice.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler V

- Además, cada vez que entramos y salimos de un vértice de grado par, hay un número par de aristas incidentes con este vértice que aún no hemos utilizado en nuestro camino.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler V

- En consecuencia, a medida que formamos el camino, cada vez que entramos en un vértice que no sea a, podemos dejarlo.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VI

- Esto significa que el camino sólo puede terminar en a.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VI

- A continuación, tenga en cuenta que el camino que hemos construido puede usar todos las aristas del grafo, o puede que no lo haga si hemos regresado a a por última vez antes de usar todas las aristas.

- Se ha construido un circuito de Euler si se han utilizado todas las aristas.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VI

- De lo contrario, considere el subgrafo H obtenido de G al eliminar las aristas ya utilizados y los vértices que no son incidentes con las aristas restantes.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VI

- Cuando eliminamos el circuito $a,\ f,\ c,\ b,\ a$ del grafo de la Figura 7, obtenemos el subgrafo etiquetado como H.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VI

- Como G está conectado, H tiene al menos un vértice en común con el circuito que se ha eliminado.

- Sea w tal vértice. (En nuestro ejemplo, c es el vértice).

- Cada vértice en H tiene un grado par (porque en G todos los vértices tenían un grado par, y para cada vértice, los pares de aristas incidentes con este vértice se han eliminado para formar H).

- Tenga en cuenta que es posible que H no esté conectado.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VII

- Comenzando en w, construya un camino simple en H eligiendo aristas tanto como sea posible, como se hizo en G.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VII

- Este camino debe terminar en w.

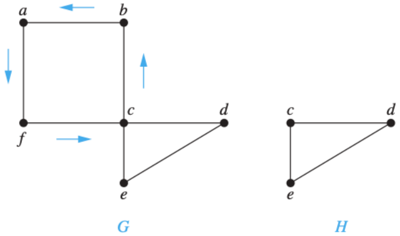
Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VII

- Por ejemplo, en la Figura 7, c, d, e, c es un camino en H.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VII

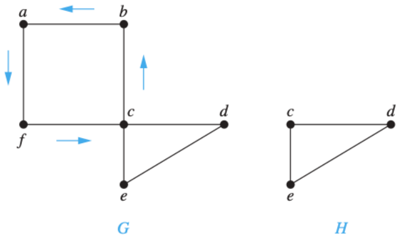
- Luego, forme un circuito en G empalmando el circuito en H con el circuito original en G (esto se puede hacer porque w es uno de los vértices en este circuito).

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VIII



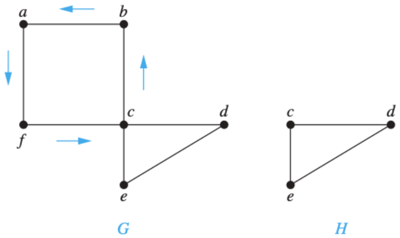
- Cuando se hace esto en el grafo de la Figura 7, obtenemos el circuito $a,\ f,\ c,\ d,\ e,\ c,\ b,\ a$.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VIII



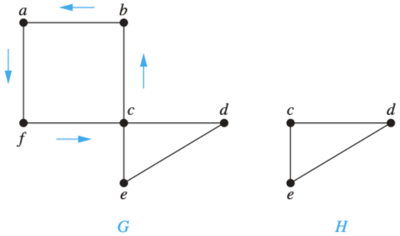
- Continúe este proceso hasta que se hayan utilizado todas las aristas.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VIII



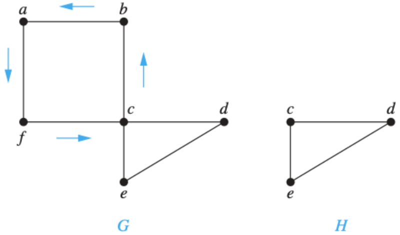
- El proceso debe terminar porque solo hay un número finito de aristas en el grafo.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VIII



- Esto produce un circuito de Euler.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler VIII



- La construcción muestra que si todos los vértices de un multígrafo conectado tienen grados pares, entonces el grafo tiene un circuito de Euler.

Teorema 2

Teorema 2

Un multigrafo conectado con al menos dos vértices tiene un circuito de Euler si y sólo si cada uno de sus vértices tiene un grado par. ■

Teorema 2

Un multigrafo conectado con al menos dos vértices tiene un circuito de Euler si y sólo si cada uno de sus vértices tiene un grado par. ∎

- Ahora podemos resolver el problema del puente de Königsberg.

Teorema 2

Un multigrafo conectado con al menos dos vértices tiene un circuito de Euler si y sólo si cada uno de sus vértices tiene un grado par. ■

- Debido a que el multigrafo que representa estos puentes, que se muestra en la Figura 4, tiene cuatro vértices de grado impar, no tiene un circuito de Euler.

Teorema 2

Un multigrafo conectado con al menos dos vértices tiene un circuito de Euler si y sólo si cada uno de sus vértices tiene un grado par. ∎

- No hay forma de comenzar en un punto dado, cruzar cada puente exactamente una vez y regresar al punto de partida.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler IX

- El procedimiento constructivo para encontrar los circuitos de Euler dado en la discusión que precede al Teorema 2 se puede formalizar en un algoritmo.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler IX

- Debido a que los circuitos en el procedimiento se eligen arbitrariamente, hay cierta ambigüedad.

- No nos molestaremos en eliminar esta ambigüedad especificando los pasos del procedimiento con mayor precisión.

- Dicho algoritmo para construir circuitos de Euler es eficiente para encontrar circuitos de Euler en un multigrafo G conectado con todos los vértices de grado par.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler IX

- El Ejemplo 4 muestra cómo los caminos y circuitos de Euler se pueden usar para resolver un tipo de rompecabezas.

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Muchos acertijos te piden que dibujes una imagen con un movimiento continuo sin levantar un lápiz para que ninguna parte de la imagen vuelva a aparecer. Podemos resolver estos acertijos utilizando circuitos y caminos de Euler. Por ejemplo, ¿se pueden dibujar las cimitarras de Mohammed, que se muestran en la Figura 8, de esta manera, donde el dibujo comienza y termina en el mismo punto?

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Muchos acertijos te piden que dibujes una imagen con un movimiento continuo sin levantar un lápiz para que ninguna parte de la imagen vuelva a aparecer. Podemos resolver estos acertijos utilizando circuitos y caminos de Euler. Por ejemplo, ¿se pueden dibujar las cimitarras de Mohammed, que se muestran en la Figura 8, de esta manera, donde el dibujo comienza y termina en el mismo punto?

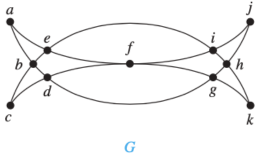


Figura 8: Las cimitarras de Mohammed.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.
- Primero, formamos el circuito a, b, d, c, b, e, i, f, e, a.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.
- Primero, formamos el circuito a, b, d, c, b, e, i, f, e, a.
- Obtenemos el subgrafo H eliminando las aristas en este circuito y todos los vértices que quedan aislados cuando se eliminan estas aristas.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.
- Primero, formamos el circuito a, b, d, c, b, e, i, f, e, a.
- Obtenemos el subgrafo H eliminando las aristas en este circuito y todos los vértices que quedan aislados cuando se eliminan estas aristas.
- Luego formamos el circuito d, g, h, j, i, h, k, g, f, d en H.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.
- Primero, formamos el circuito $a, b, d, c, b, e, i, f, e, a$.
- Obtenemos el subgrafo H eliminando las aristas en este circuito y todos los vértices que quedan aislados cuando se eliminan estas aristas.
- Luego formamos el circuito $d, g, h, j, i, h, k, g, f, d$ en H.
- Después de formar este circuito, hemos usado todos las aristas en G.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.
- Primero, formamos el circuito a, b, d, c, b, e, i, f, e, a.
- Obtenemos el subgrafo H eliminando las aristas en este circuito y todos los vértices que quedan aislados cuando se eliminan estas aristas.
- Luego formamos el circuito d, g, h, j, i, h, k, g, f, d en H.
- Después de formar este circuito, hemos usado todos las aristas en G.
- Al empalmar este nuevo circuito en el primer circuito en el lugar apropiado produce el circuito de Euler a, b, d, g, h, j, i, h, k, g, f, d, c, b, e, i, f, e, a.

Ejemplo 4 II

Solución:

- Podemos resolver este problema porque el grafo G que se muestra en la Figura 8 tiene un circuito de Euler.
- Tiene tal circuito porque todos sus vértices tienen grado par.
- Usaremos el algoritmo bosquejado para construir un circuito de Euler.
- Primero, formamos el circuito $a, b, d, c, b, e, i, f, e, a$.
- Obtenemos el subgrafo H eliminando las aristas en este circuito y todos los vértices que quedan aislados cuando se eliminan estas aristas.
- Luego formamos el circuito $d, g, h, j, i, h, k, g, f, d$ en H.
- Después de formar este circuito, hemos usado todos las aristas en G.
- Al empalmar este nuevo circuito en el primer circuito en el lugar apropiado produce el circuito de Euler $a, b, d, g, h, j, i, h, k, g, f, d, c, b, e, i, f, e, a$.
- Este circuito da una forma de dibujar las cimitarras sin levantar el lápiz o volver sobre parte de la imagen. $\square$

- Ahora mostraremos que un multigrafo conectado tiene un camino de Euler (y no un circuito de Euler) si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler X

- Primero, suponga que un multigrafo conectado tiene un camino de Euler desde a hasta b, pero no un circuito de Euler.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler X

- La primer arista del camino aporta uno al grado de a.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler X

- Se hace una contribución de dos al grado de a cada vez que el camino pasa por a. La última arista del camino aporta uno al grado de b.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler X

- Cada vez que el camino pasa por b hay una contribución de dos a su grado.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler X

- En consecuencia, tanto a como b tienen un grado impar.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XI

- Todos los demás vértices tienen un grado par, porque el camino aporta dos al grado de un vértice cada vez que lo atraviesa.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XI

- Ahora considere lo contrario.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XI

- Suponga que un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar, digamos a y b.

- Considere el grafo más grande compuesto por el grafo original con la adición de una arista $\{a, b\}$.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XI

- Cada vértice de este grafo más grande tiene un grado par, por lo que hay un circuito de Euler.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XI

- La eliminación de la nueva arista produce un camino de Euler en el grafo original.

- El Teorema 3 resume estos resultados.

Teorema 3

Un multigrafo conectado tiene un camino de Euler pero no un circuito de Euler si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar. ■

Ejemplo 5

¿Cuáles de los grafos que se muestran en la Figura 9 tienen un camino de Euler?

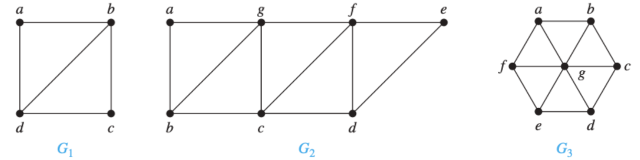


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Ejemplo 5 II

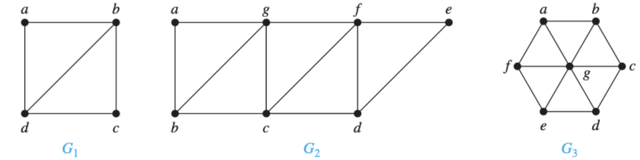


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- G_1 contiene exactamente dos vértices de grado impar, a saber, b y d.

Ejemplo 5 II

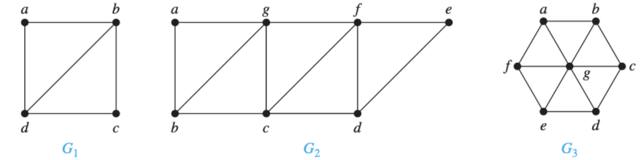


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- Por lo tanto, tiene un camino de Euler que debe tener a b y d como puntos finales.

Ejemplo 5 II

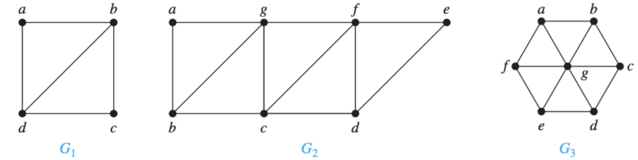


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- Uno de esos caminos de Euler es d, a, b, c, d, b.

Ejemplo 5 II

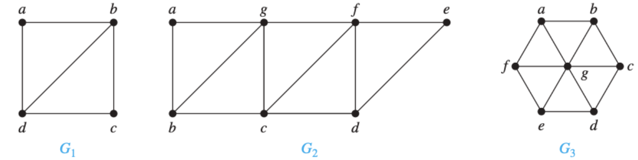


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- De manera similar, G_2 tiene exactamente dos vértices de grado impar, a saber, b y d.

Ejemplo 5 II

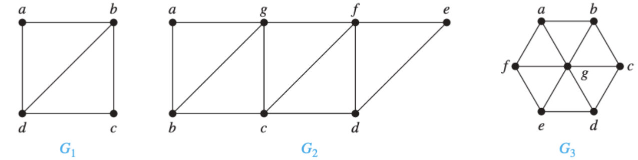


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- Por lo tanto, tiene un camino de Euler que debe tener a b y d como puntos finales.

Ejemplo 5 II

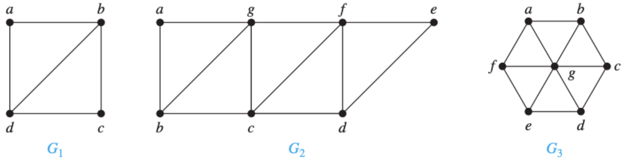


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- Uno de esos caminos de Euler es b, a, g, f, e, d, c, g, b, c, f, d.

Ejemplo 5 II

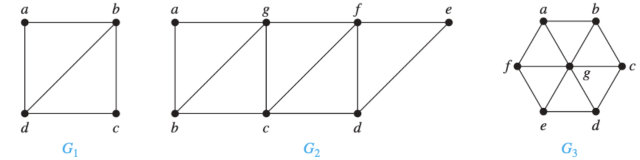


Figura 9: Tres grafos no dirigidos para el Ejemplo 5.

Solución:

- G_3 no tiene camino de Euler porque tiene seis vértices de grado impar.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XII

- Volviendo a Königsberg del siglo XVIII.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XII

- ¿Es posible comenzar en algún punto de la ciudad, atravesar todos los puentes y terminar en algún otro punto de la ciudad?

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XII

- Esta pregunta se puede responder determinando si existe un camino de Euler en el multigrafo que representa los puentes en Königsberg.

Condiciones necesarias y suficientes para circuitos y caminos de Euler XII

- Debido a que hay cuatro vértices de grado impar en este multigrafo, no hay un camino de Euler, por lo que tal viaje es imposible.

Caminos y circuitos de Hamilton I

- Hemos desarrollado las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de caminos y circuitos que contengan exactamente una vez cada arista de un multigrafo.

- ¿Podemos hacer lo mismo con caminos y circuitos simples que contienen exactamente una vez cada vértice del grafo?

Definición 7

Un camino simple en un grafo G que pasa por cada vértice exactamente una vez se llama *camino de Hamilton*, y un circuito simple en un grafo G que pasa por cada vértice exactamente una vez se llama *circuito de Hamilton*. Es decir, el camino simple x_0, $x_1, \ldots$, x_{n-1}, x_n en el grafo $G = (V, E)$ es un camino de Hamilton si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y el circuito simple $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (con $n > 0$) es un circuito de Hamilton si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un camino de Hamilton.

Caminos y circuitos de Hamilton II

- Esta terminología proviene de un juego, llamado el *rompecabezas de Icosian*, inventado en 1857 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton.

- Consistía en un dodecaedro de madera [un poliedro con 12 pentágonos regulares como caras, como se muestra en la Figura 10 (a)], con una clavija en cada vértice del dodecaedro y una cuerda.

- Consistía en un dodecaedro de madera [un poliedro con 12 pentágonos regulares como caras, como se muestra en la Figura 10 (a)], con una clavija en cada vértice del dodecaedro y una cuerda.

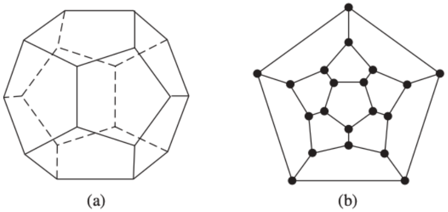


Figura 10: El rompecabezas de Hamilton "Un viaje alrededor del mundo".

- Los 20 vértices del dodecaedro fueron etiquetados con diferentes ciudades del mundo.

- El objetivo del rompecabezas era comenzar en una ciudad y viajar a lo largo de las aristas del dodecaedro, visitar cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar de regreso en la primera ciudad.

Caminos y circuitos de Hamilton III

- El circuito recorrido se delimitó con la cuerda y las clavijas.

- Debido a que el autor no puede proporcionar a cada lector un sólido de madera con clavijas y cuerda, consideraremos la pregunta equivalente:

- ¿Hay un circuito en el grafo que se muestra en la Figura 10 (b) que pase por cada vértice exactamente una vez?

- Esto resuelve el enigma porque este grafo es isomorfo al grafo que consta de los vértices y aristas del dodecaedro.

- En la Figura 11 se muestra una solución del rompecabezas de Hamilton.

- En la Figura 11 se muestra una solución del rompecabezas de Hamilton.

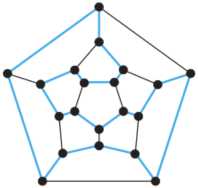


Figura 11: Una solución al rompecabezas de Hamilton "Un viaje alrededor del mundo".

Ejemplo 6

¿Cuáles de las grafos simples de la Figura 12 tienen un circuito de Hamilton o, en caso contrario, un camino de Hamilton?

Ejemplo 6 II

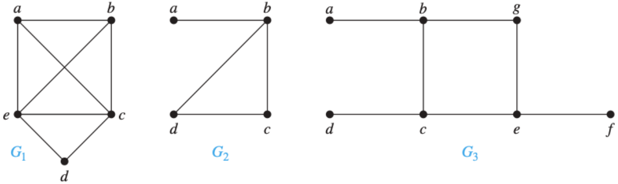


Figura 12: Tres grafos simples para el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 II

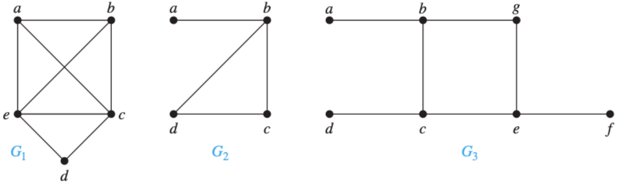


Figura 12: Tres grafos simples para el Ejemplo 6.

Solución:

- G_1 tiene un circuito de Hamilton: a, b, c, d, e, a.

Ejemplo 6 II

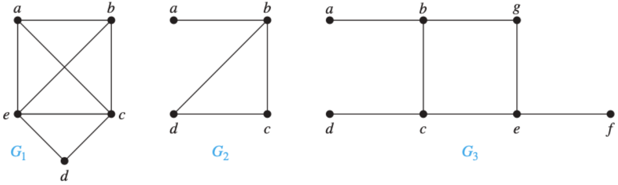


Figura 12: Tres grafos simples para el Ejemplo 6.

Solución:

- No hay un circuito de Hamilton en G_2 (esto se puede ver si se observa que cualquier circuito que contenga todos los vértices debe contener la arista $\{a, b\}$ dos veces), pero G_2 tiene un camino de Hamilton, a saber, a, b, c, d.

Ejemplo 6 II

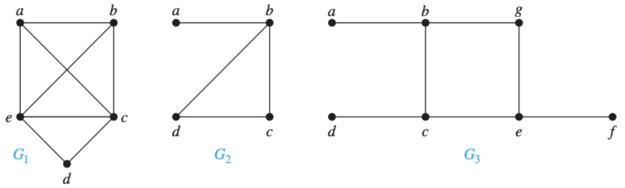


Figura 12: Tres grafos simples para el Ejemplo 6.

Solución:

- G_3 no tiene un circuito de Hamilton ni un camino de Hamilton, porque cualquier camino que contenga todos los vértices debe contener una de las aristas $\{a, b\}$, $\{e, f\}$ y $\{c, d\}$ más de una vez.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton I

- ¿Existe una forma sencilla de determinar si un grafo tiene un circuito o un camino de Hamilton?

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton I

- Al principio, podría parecer que debería haber una forma fácil de determinar esto, porque existe una forma sencilla de responder a la pregunta similar de si un grafo tiene un circuito de Euler.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton I

- Sorprendentemente, no se conocen criterios simples necesarios y suficientes para la existencia de circuitos de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton I

- Sin embargo, se conocen muchos teoremas que dan condiciones suficientes para la existencia de circuitos de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton I

- Además, se pueden usar ciertas propiedades para mostrar que un grafo no tiene un circuito de Hamilton.

- Por ejemplo, un grafo con un vértice de grado uno no puede tener un circuito de Hamilton, porque en un circuito de Hamilton, cada vértice incide con dos aristas en el circuito.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton II

- Además, si un vértice en el grafo tiene grado dos, entonces ambas aristas que inciden con este vértice deben ser parte de cualquier circuito de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton II

- También, tenga en cuenta que cuando se está construyendo un circuito de Hamilton y este circuito ha pasado por un vértice, entonces todas las aristas restantes que inciden en este vértice, distintos de los dos utilizados en el circuito, pueden eliminarse de la consideración.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton II

- Aún más, un circuito de Hamilton no puede contener un circuito más pequeño dentro de él.

Ejemplo 7 I

Ejemplo 7

Muestre que ninguno de los grafos que se muestran en la Figura 13 tiene un circuito de Hamilton.

Ejemplo 7 II

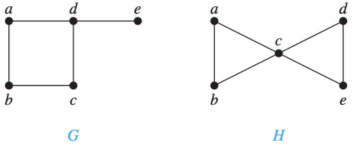


Figura 13: Dos grafos que no tienen un circuito de Hamilton.

Ejemplo 7 II

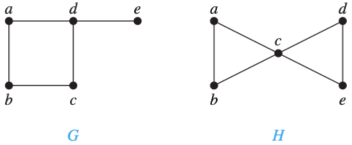


Figura 13: Dos grafos que no tienen un circuito de Hamilton.

Solución:

- No hay circuito de Hamilton en G porque G tiene un vértice de grado uno, es decir, e.

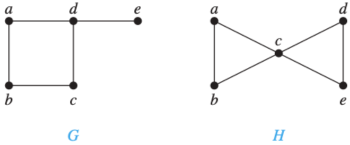


Figura 13: Dos grafos que no tienen un circuito de Hamilton.

Solución:

- Ahora considere H.

Ejemplo 7 II

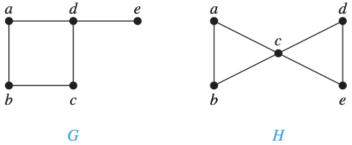


Figura 13: Dos grafos que no tienen un circuito de Hamilton.

Solución:

- Dado que los grados de los vértices a, b, d y e son dos, cada arista incidente con estos vértices debe ser parte de cualquier circuito de Hamilton.

Ejemplo 7 II

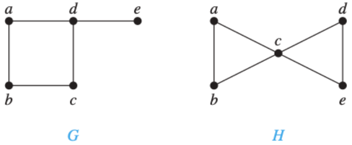


Figura 13: Dos grafos que no tienen un circuito de Hamilton.

Solución:

- Ahora es fácil ver que no puede existir ningún circuito de Hamilton en H, ya que cualquier circuito de Hamilton tendría que contener cuatro aristas incidentes con c, lo cual es imposible. $\square$

Ejemplo 8

Demuestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

Demuestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$.

Solución:

- Podemos formar un circuito de Hamilton en K_n comenzando en cualquier vértice.

Ejemplo 8

Demuestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$.

Solución:

- Dicho circuito se puede construir visitando vértices en el orden que elijamos, siempre que el camino comience y termine en el mismo vértice y se visite entre sí exactamente una vez.

Ejemplo 8

Demuestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$.

Solución:

- Esto es posible porque hay aristas en K_n entre dos vértices cualesquiera.

$\square$

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton III

- Aunque no se conocen condiciones útiles, necesarias y suficientes para la existencia de circuitos de Hamilton, se han encontrado bastantes condiciones suficientes.

- Tenga en cuenta que cuantas más aristas tenga un grafo, más probable será que tenga un circuito de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton III

- Además, agregar aristas (pero no vértices) a un grafo con un circuito de Hamilton produce un grafo con el mismo circuito de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton III

- Entonces, a medida que agregamos aristas a un grafo, especialmente cuando nos aseguramos de agregar aristas a cada vértice, aumenta la probabilidad de que exista un circuito de Hamilton en este grafo.

- En consecuencia, esperaríamos que hubiera condiciones suficientes para la existencia de circuitos de Hamilton que dependan de que los grados de los vértices sean suficientemente grandes.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton IV

- Enunciamos aquí dos de las condiciones suficientes más importantes. Estas condiciones fueron encontradas por Gabriel A. Dirac en 1952 y Øystein Ore en 1960.

Teorema 4

TEOREMA DE DIRAC Si G es un grafo simple con n vértices con $n \geq 3$ tal que el grado de cada vértice en G es al menos $n/2$, entonces G tiene un circuito de Hamilton.

■

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton IV

Teorema 5

TEOREMA DE ORE Si G es un grafo simple con n vértices con $n \geq 3$ tal que $deg(u) + deg(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes u y v en G, entonces G tiene un circuito de Hamilton. ■

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton V

- Tanto el teorema de Ore como el teorema de Dirac proporcionan condiciones suficientes para que un grafo simple conectado tenga un circuito de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton V

- Sin embargo, estos teoremas no proporcionan las condiciones necesarias para la existencia de un circuito de Hamilton.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton V

- Por ejemplo, el grafo C_5 tiene un circuito de Hamilton pero no satisface las hipótesis del teorema de Ore ni del teorema de Dirac, como puede verificar el lector.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton V

- Los mejores algoritmos conocidos para encontrar un circuito de Hamilton en un grafo o determinar que no existe tal circuito tienen una complejidad de tiempo exponencial en el peor de los casos (en el número de vértices del grafo).

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton V

- Encontrar un algoritmo que resuelva este problema con complejidad en tiempo polinomial en el peor de los casos sería un logro importante porque se ha demostrado que este problema es NP-completo.

Condiciones para la existencia de circuitos de Hamilton V

- En consecuencia, la existencia de tal algoritmo implicaría que muchos otros problemas aparentemente intratables podrían resolverse utilizando algoritmos con complejidad de tiempo polinomial en el peor de los casos.

Ejercicios I

1. Para cada uno de los grafos de la Figura 14 determine si tiene un circuito de Euler. Construya tal circuito cuando exista uno. Si no existe un circuito de Euler, determine si el grafo tiene un camino de Euler y construya dicho camino si existe.

Ejercicios II

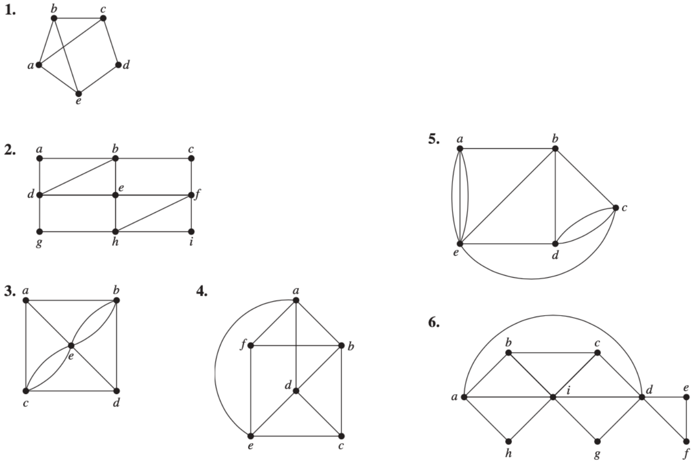


Figura 14: Grafos para el Ejercicio 1.

2. Para cada uno de los grafos de la Figura 15 determine si tiene un circuito de Hamilton. Construya tal circuito cuando exista uno. Si no existe un circuito de Hamilton, determine si el grafo tiene un camino de Hamilton y construya dicho camino si existe.

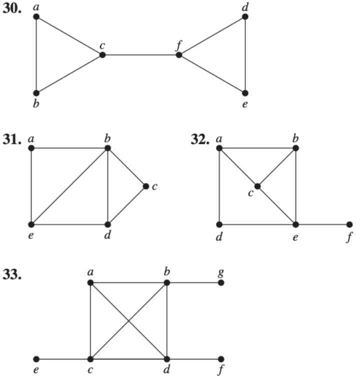


Figura 15: Grafos para el Ejercicio 2.

Fin del curso

¡Muchas gracias!